"Выходи решать!". Решения по математике

Основной вариант

Задача 1. Петя с 7 по 11 класс участвовал в 31 олимпиаде. В каждом следующем учебном году он участвовал в бОльшем количестве олимпиад, чем в предыдущем, а в 11 классе количество олимпиад, в которых он принял участие, возросло в 3 раза по сравнению с 7 классом. В скольки олимпиадах Петя принял участие в 10 классе? Полученное значение впишите в поле для ответа.

Доказательство. Оценка: 7 классе Петя мог участвовать только в 3 олимпиадах.

В самом деле, если бы он в 7 классе участвовал в 2 олимпиадах или меньше, то в 11 классе, согласно условию, он должен был бы участвовать в не более чем $2 \cdot 3 = 6$ олимпиадах. Тогда бы суммарное количество участий было бы оценено как $2 + 3 + \ldots + 6 = 20 \leq 31$.

Если бы Петя участвовал в 7 классе в 4 или бОльшем количестве олимпиад, то в 11 классе он должен был бы участвовать как минимум в $4 \cdot 3 = 12$ олимпиадах. Тогда за 8-10 классы он должен был принять участие в не более, чем $31 - (12 + 4) = 15$ олимпиадах. Но поскольку в 8 классе он должен был принять участие как минимум в 5 олимпиадах, то за 9-10 классы он суммарно примет участие в не более, чем $15 - 5 = 10$ олимпиадах, что противоречит условию, ибо мы не можем разбить 10 на два числа, бОльших 5, причем одно из которых должно быть больше другого.

Таким образом, в 7 классе Петя принял участие в 3 олимпиадах, в 11 классе — в 9. Остается определить, в скольки олимпиадах Петя мог принять участие в 8-10 классах. Суммарно за эти 3 года он должен был принять участие в $31 - (3 + 9) = 19$ олимпиадах. Заметим, что 19 — нечетное, и по условию оно должно представлять собой сумму 3 чисел. Чтобы получить такой результат, оно должно состоять либо из 3 нечетных чисел, либо из 2 четных и одного нечетного.

В случае двух четных и одного нечетного условию удовлетворяет только две тройки чисел: $4 + 7 + 8$ и $5 + 6 + 8$.

В случае трех нечетных чисел ни одна тройка из заданного диапазона не удовлетворяет условию, так как в данном диапазоне (больше 3 и меньше 9) не найдется 3 нечетных чисел.

Таким образом, видим, что во всех найденных случаях число олимпиад в 10 классе должно равняться 8.

Ответ: 8 . □

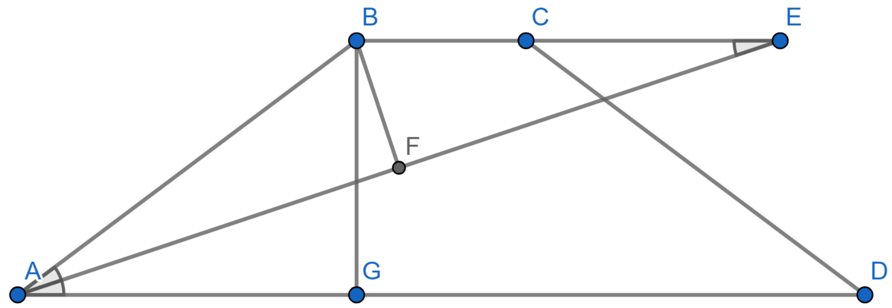
Задача 2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 10 см и 2 см соответственно, а боковые стороны $AB = CD = 5$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания ВС в точке E. Найдите квадрат биссектрисы угла ABE в треугольнике ABE. Ответ выразите в см с точностью до одного знака после запятой числа и введите в поле ответа.

Решение. Обозначим $\angle BAD = 2\alpha$. $\angle BAE = \angle EAD$ (по условию), $\angle EAD = \angle BEA$ (как накрест лежащие), следовательно

$$\angle BAE = \angle EAD = \angle BEA.$$

Тогда треугольник ABE — равнобедренный, причем $BE = AB = 5$. В нём биссектриса BF является также и высотой. Значит,

$$BF = AB \sin \angle BAF = 5 \sin \alpha.$$



Получаем, что $BF = 5\sin\alpha$, причем $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$, а $\cos 2\alpha$ мы можем найти.

Проведем в трапеции высоту BG. В силу того, что трапеция равнобедренная, получаем, что $AG = 4$. Тогда $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$, а $\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Тогда

$$BF = 5\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Следовательно, искомая величина равна

$$BF^2 = \frac{10}{4} = 2,5(\text{см}).$$

Ответ: 2,5 см. □

Задача 3. 25 человек писали олимпиаду “Выходи решать” по математике. Оказалось, что суммарно было решено 106 задач, причем каждый из школьников решил 3, 4 или 5 задач. На сколько больше учащихся, решивших 5 задач, по сравнению с учащимися, которые решили 3 задачи. Полученное значение впишите в поле для ответа.

Решение. Обозначим за x — количество людей, решивших 3 задачи; за y — решивших 4 задачи; за z — решивших 5 задач.

Тогда условие задачи можно переписать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 25, \\ 3x + 4y + 5z = 106. \end{cases}$$

Заметим также, что в условии просят найти, чему равно $z - x$.

Чтобы исключить из системы уравнений y, можно, например, домножить первое уравнение системы на 4 и вычесть полученное уравнение из первого.

Тогда получим:

$$3x + 4y + 5z - (4x + 4y + 4z) = 106 - 100$$

$$z - x = 6.$$

Полученное соотношение и есть искомая величина.

Ответ: 6. □

Задача 4. Коля и его папа бегают по стадиону. Время от времени Колю обгоняет его отец. Стоило Коле изменить направление движения на противоположное, как они стали встречаться в 6 раз чаще. Во сколько раз Коля бегает медленнее своего отца? Ответ выразите с точностью до одного знака после запятой и введите в поле ответа.

Решение. Пусть скорость Коли равна v_1, скорость его отца — v_2, а S — длина одного круга.

Тогда условие можно записать следующим образом:

$$\frac{S}{v_2 - v_1} = 6\frac{S}{v_2 + v_1},$$

откуда можно выразить связь между v_1 и v_2:

$$v_1 + v_2 = 6 \cdot (v_2 - v_1) = 6v_2 - 6v_1,$$

$$5v_2 = 7v_1,$$

тогда искомая величина равна

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Ответ: 1,4. □

Задача 5. Сегодня 17.11.2018. В связи этим просим Вас найти целые положительные a, b, c, d, не превосходящие 17^{11} и удовлетворяющие условию

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = 1, \\ \dfrac{a}{d} + \dfrac{c}{b} = 2018. \end{cases}$$

В ответе через запятую укажите a, b, c, d.

Решение. Жюри засчитывало все решения, удовлетворяющие условию задачи.

Тем не менее, задача представляет собой частный случай более фундаментальной закономерности. Приведем ответ не в виде просто числа, а в структурном виде, чтобы даже после контрольной Вы могли бы поразмышлять о прекрасном, и, возможно, также, как и автор задачи, заметить эту закономерность:

$$\begin{cases} \dfrac{2019}{2019 \cdot 2019 - 1} + \dfrac{2019 \cdot (2018 \cdot 2019 - 1)}{2019 \cdot (2019 \cdot 2019 - 1)} = 1, \\ \dfrac{2019}{2019 \cdot (2019 \cdot 2019 - 1)} + \dfrac{2019 \cdot (2018 \cdot 2019 - 1)}{2019 \cdot 2019 - 1} = 2018. \end{cases}$$

В самом деле:

$$\frac{2019}{2019 \cdot 2019 - 1} + \frac{2019 \cdot (2018 \cdot 2019 - 1)}{2019 \cdot (2019 \cdot 2019 - 1)} = \frac{2019}{2018 \cdot 2020} + \frac{2019 \cdot (2018 \cdot 2019 - 1)}{2018 \cdot 2020 \cdot 2019} =$$

$$= \frac{2019 + 2018 \cdot 2019 - 1}{2018 \cdot 2020} = \frac{2019 \cdot (1 + 2018) - 1}{2018 \cdot 2020} = \frac{2019^2 - 1}{2018 \cdot 2020} = \frac{2018 \cdot 2020}{2018 \cdot 2020} = 1$$

$$\frac{2019}{2019 \cdot (2019 \cdot 2019 - 1)} + \frac{2019 \cdot (2018 \cdot 2019 - 1)}{2019 \cdot 2019 - 1} = \frac{1}{2018 \cdot 2020} + \frac{2019 \cdot (2018 \cdot 2019 - 1)}{2018 \cdot 2020} =$$

$$= \frac{1 + 2018 \cdot 2019^2 - 2019}{2018 \cdot 2020} = \frac{2018 \cdot 2019^2 - 2018}{2018 \cdot 2020} = \frac{2018 \cdot (2019^2 - 1)}{2018 \cdot 2020} =$$

$$= \frac{2018 \cdot 2018 \cdot 2020}{2018 \cdot 2020} = 2018$$

Пример ответа: 2019, $2019 \cdot 2019 - 1$, $2019 \cdot (2018 \cdot 2019 - 1)$, $2019 \cdot (2019 \cdot 2019 - 1)$. □